## 取後放回之抽樣方法的估計方式

在單群落的情況下，假設在目標區域實際存在種物種，且實際存在之物種數為一未知參數。且抽樣單位式從目標區域中針對其中的抽樣區塊進行隨機抽樣，並記錄每個區塊中的物種存在與否。若是該樣本總共包含個抽樣區塊，並且 表示第物種在樣本中出現的區塊數量。則遵循參數為且檢驗機率為的二項分佈 (binomial distribution) 。在此，除了取決於群落規模外，也與其他多種的生物因素相關。

Chiu (2022) 使用的混合二項式模型，建立一個新的針對單群落物種數的估計式。假設出現頻率向量 遵循二項分佈，其中，，為機率密度函數為獨立同分佈的隨機變數。同時，假設服從 ，獲得以下樣本之物種出現頻率的邊際分佈如下，為樣本中的物種豐富度正好為的平均機率：

又令表示在個區塊中準確觀測到的物種數，而為在單群落樣本中出現個區塊數。並根據柯西-施瓦茨不等式 (Cauchy-Schwarz inequality) 之概念與Good-Turing頻率公式 (Good, 1953, 2000) 得出近似式：。由該近似式可以得知，出現於較少區塊的稀有物種可以為未被觀測到的物種豐富度提供更多的估計資訊。

並根據樣本中物種出現頻率的邊際機率分佈，可知可以表示為：

依據上述式子，可獲得未觀測以及出現一次至三次的物種豐富度期望值：

並依據上述概念，將其推廣至兩群落。為兩樣本的物種豐富度正好分別為和的平均機率。則：

而與的範圍分別為與。隨後，又令表示在第一群落個區塊且在第二群落個區塊數中準確觀測到的物種數。則樣本中觀測到的共同物種數為。藉此，可獲得在第一群落中分別出現未觀測到以及一至二個區塊，且同時在第二群落中出現過至少一次的期望值：

|  |  |
| --- | --- |
|  | (1) |
|  | (2) |
|  | (3) |

將 設定為1，且。可藉由式 (1)、式 (2) 與式 (3) 成立以下近似值：

並經由化簡 的結果，求得；又透過化簡 之後，可求得；隨後，依據不等式 = ，故將作為帶入 ，最終可獲得：

表示：若時，則；若時，則。同理，可經由上述相同方式推導出與：

並加入對估計式進行修正，最終得估計式：

其中，

且表示：若時，則；若時，則。